§ Teoria de perturbações dependente do tempo sobre um oscilador harmônico (um modo do campo eletromagnético)

A equação de movimento dos operadores na ~~representação~~ versão de Heisenberg é dada pela equação

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{\Omega}(\vec{x},t) = \left[\hat{\Omega}(\vec{x},t), \hat{\mathcal{H}}\right].$$

Consideremos agora nesta ~~representação~~ versão o problema do oscilador harmônico forçado onde a força externa depende do tempo. Escrevamos o Hamiltoniano da maneira seguinte

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - q F(t),$$

onde $F(t)$ é uma função real. Sem maior trabalho (por causa da simetria) podemos generalizar a força com um termo dependente da velocidade.

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - qF(t) - p\,G(t),$$

onde $G(t)$ é também real. Este Hamiltoniano pode ser reescrito em 2ª quantização usando os operadores de criação e destruição. Em efeito

$$\hat{q} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger})$$

$$p = i\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}^{\dagger} - \hat{a})$$

logo

$$F(t)q + G(t)p = F(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^{\dagger}) + iG(t)\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(a^{\dagger} - a)$$

$$= -f(t)a - f^{*}(t)a^{\dagger}$$

com

$$f(t) = -F(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} + i\,G(t)\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$$

e finalmente temos:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(a^{\dagger}a + \tfrac{1}{2}\right) + f(t)a + f^{*}(t)a^{\dagger} .$$

O termo da força externa não conserva o número de partículas.

Nos interessa resolver o caso onde a força age apenas num intervalo finito de tempo $t_1 < t < t_2$, sendo que $f(t) \equiv 0$ para $t > t_2$ e $t < t_1$ (nestes casos temos oscilações livres). Na ~~representação~~ versão de Heisenberg os operadores satisfazem a relação de comutação

$$[a(t), a^\dagger(t)]_- = 1$$

e a equações do movimento são

$$i\hbar\, \dot{a}(t) = [a(t), \mathcal{H}(t)] = \hbar\omega\, [a(t), a^\dagger(t) a(t)]$$

$$+ f^*(t) [a(t), a^\dagger(t)]$$

$$= \hbar\omega\, a(t) + f^*(t)$$

ou

$$\dot{a}(t) + i\omega a(t) = -\frac{i}{\hbar} f^*(t)$$

No caso livre temos $(t > t_2,$ ou $t < t_1)$

$$\dot{a}_{livre}(t) = -i\omega\, a_{livre}(t),$$

onde

$$a_{livre}(t) = a_{livre}\, e^{-i\omega t}$$

A equação não-homogênea pode ser resolvida usando a função de Green que é solução de

$$\frac{d}{dt} G(t-t') + i\omega G(t-t') = \delta(t-t').$$

Obtida a função de Green temos uma solução particular da eq. não-homogênea na forma de uma convolução

$$a(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')\, \overset{*}{f}(t')\, dt'$$

Para $t \neq t'$ a função de Green é proporcional a $e^{-i\omega(t-t')}$, mas em $t=t'$ há uma descontinuidade. O salto em $t=t'$ pode ser obtido integrando a equação diferencial em torno de $t=t'$

$$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} dt\, \frac{d}{dt}G(t-t') + i\omega \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} dt\, G(t-t') = 1 \, , \quad (\varepsilon > 0)$$

$$G(\varepsilon) - G(-\varepsilon) + i\omega \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} dt\, G(t-t') = 1$$

e tomando o limite temos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[G(\varepsilon) - G(-\varepsilon) \right] = 1 \quad , \quad \varepsilon > 0 \, .$$

Definem-se as funções de Green retardada e avançada

$$\begin{cases} G_R(t-t') = \theta(t-t')\, e^{-i\omega(t-t')} \\ G_A(t-t') = -\theta(t'-t)\, e^{-i\omega(t-t')} \end{cases}$$

onde $\theta(\tau)$ é a função degrau de Heaveside. Chamamos

$a_{in}(t)$ e $a_{out}(t)$

as soluções da eq. homogênea (caso livre) que coincidem com a solução da eq. não-homogênea para $t<t_1$ e $t>t_2$ respectivamente. Assim

$$a(t) = a_{in}(t) - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} G_R(t-t')\, f^*(t')\, dt'$$

$$= a_{in}(t) - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} e^{-i\omega(t-t')} f^*(t')\, dt'$$

ou

$$a(t) = a_{out}(t) - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} G_A(t-t')\, f^*(t')\, dt'$$

$$= a_{out}(t) + \frac{i}{\hbar}\int_{t}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} f^*(t')\, dt'$$

de onde obtemos:

$$a_{in}(t) - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} e^{-i\omega(t-t')} f^*(t') dt' = a_{out}(t) + \frac{i}{\hbar}\int_{t}^{\infty} dt'\, e^{i\omega(t-t')} f^*(t')$$

ou

$$a_{out}(t) = a_{in}(t) - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e^{-i\omega(t-t')} f^*(t')$$

logo

$$a_{out}(t) = a_{in}(t) - \frac{i}{\hbar} e^{-i\omega t} g^*(\omega)$$

onde

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, e^{-i\omega t'} f(t')$$

é a transformada de Fourier de $f(t)$. A dependência temporal dos operadores a_{in}, a_{out} é dada pelo fator $e^{-i\omega t}$, assim

$$a_{out} = a_{in} - \frac{i}{\hbar} g^*(\omega) .$$

O objetivo da teoria de perturbações dependente do tempo é encontrar um operador unitário S que transforme o a_{in} em a_{out}, isto é

$$a_{out} = S^\dagger a_{in} S .$$

Em particular o Hamiltoniano muda de

$$H_{in} = \hbar\omega \left(a^\dagger_{in} a_{in} + \frac{1}{2}\right), \text{ para } t < t_1$$

para

$$H_{out} = \hbar\omega \left(a^\dagger_{out} a_{out} + \frac{1}{2}\right), \text{ para } t > t_2 .$$

Chamamos $|n\rangle_{in}$ e $|n\rangle_{out}$ os autovalores dos operadores números nos casos asintóticos. A transformação unitária S liga os correspondentes kets da maneira

$$|n\rangle_{out} = S^{\dagger} |n\rangle_{in} .$$

A ação do operador unitário S sobre a_{in} é apenas uma traslação num número complexo. Notamos que

$$e^{-\alpha a^{\dagger} + \alpha^* a} \, a \, e^{\alpha a^{\dagger} - \alpha^* a} = a + \alpha ,$$

que pode ser calculado fácilmente da relação

$$e^{A} B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \cdots$$

com $A = \alpha^* a - \alpha a^{\dagger}$, e $B = a$. Das relações de comutação

$$[A, B] = [\alpha^* a - \alpha a^{\dagger}, a] = -\alpha [a^{\dagger}, a] = \alpha$$

e $[A, [A, B]] = 0$ e todos os outros comutadores são nulos.

Daqui obtemos o operador S fácilmente com

$$\alpha = -\frac{i}{\hbar} g^*(\omega) ,$$

isto é

$$S = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} g^*(\omega) a^\dagger_{in} - \frac{i}{\hbar} g(\omega) a_{in}\right]$$

com

$$S^\dagger = \exp\left[\frac{i}{\hbar} g(\omega) a_{in} + \frac{i}{\hbar} g^*(\omega) a^\dagger_{in}\right]$$

Notamos também que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[f(t)\, a_{in}(t) + f^*(t)\, a^\dagger_{in}(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[f(t) e^{-i\omega t} a_{in} + f^*(t) e^{i\omega t} a^\dagger_{in}\right]$$

$$= g(\omega)\, a_{in} + g^*(\omega)\, a^\dagger_{in} \,,$$

logo

$$S = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)\, a_{in}(t) + f^*(t)\, a^\dagger_{in}(t)\right] dt\right\} .$$

Suponhamos que a condição inicial é que o sistema está no estado fundamental antes de ligar o campo externo (estado fundamental $|0\rangle_{in}$ do Hamiltoniano $\hat{H}_{in}$). Interessa saber a probabilidade que o sistema se encontre no estado $|n\rangle_{out}$ depois de ter agido com o campo externo e desligado a força. A amplitude de probabilidade é dada por

$$ {}_{out}\langle n|0\rangle_{in} = \{{}_{in}\langle n|S\}|0\rangle_{in} $$

$$ = {}_{in}\langle n|S|0\rangle_{in} $$

Usamos a identidade:

$$ S = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = e^{C+D} = e^{C}\cdot e^{D}\cdot e^{-\frac{1}{2}[C,D]} $$

válida quando os operadores C, D comutam com o seu comutador $[C,D]$

$$ [C,D] = [\alpha a^\dagger, -\alpha^* a] = -|\alpha|^2 [a^\dagger, a] = +|\alpha|^2 $$

$$ S = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}, $$

e operando sobre o vácuo

$$ S|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle, $$

logo

$$ \langle n|S|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \langle n|e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle $$

$$ = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu!}} \alpha^\nu \langle n|\frac{(a^\dagger)^\nu}{\sqrt{\nu!}}|0\rangle $$

$$ = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\sqrt{\nu!}} \underbrace{\langle n|\nu\rangle}_{\delta_{n\nu}} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} $$

e a correspondente probabilidade é

$$|\langle n|S|0\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} ,$$

que é uma distribuição de Poisson típica de um estado coerente. Assim temos:

$$|0\rangle_{in} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{out}\langle n|0\rangle_{in}\ |n\rangle_{out}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\ |n\rangle_{out}$$

$$= |\alpha\rangle_{out} .$$

Também temos a transformação inversa:

$$|0\rangle_{out} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{in}\langle n|0\rangle_{out}\ |n\rangle_{in}$$

$${}_{in}\langle n|0\rangle_{out} = {}_{in}\langle n|S^{+}|0\rangle_{in}$$

$$S^{+} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\, e^{-\alpha a^{+}}\, e^{\alpha a}$$

$$S^{+}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\, e^{-\alpha a^{+}}\ |0\rangle_{in}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{\sqrt{n!}}\frac{(a^{+})^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle_{in} = |-\alpha\rangle_{in} ,$$

isto é $\quad |0\rangle_{out} = |-\alpha\rangle_{in}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|} \frac{(-\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_{in} \,,$$

de maneira que o estado de saída é um estado coerente com

$$-\alpha = \frac{i}{\hbar} g^*(\omega) = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, e^{i\omega t'} f^*(t')$$

§ Interação de um campo EM com partículas carregadas que podem ser descritas por distribuições clássicas de correntes.

Usamos uma formulação não relativista. Vamos supor que as partículas são férmions de massa $\underline{m}$ e carga $\underline{e}$ (por exemplo elétrons). O Hamiltoniano de interação é obtido a partir do Hamiltoniano das partículas livres pela substituição

$$\vec{p} \to \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \,,$$

de maneira que o Hamiltoniano total tem a forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(\text{rad}) + \mathcal{H}_0(\text{part}) + \mathcal{H}_1(\text{rad-part}),$$

Com

$$\mathcal{H}_0(\text{rad}) = \frac{1}{8\pi}\int d\vec{x}\,(\vec{E}^2+\vec{B}^2) \quad \text{(Hamiltoniano de radiação livre)}$$

$\mathcal{H}_0(\text{part}) + \mathcal{H}_1(\text{rad-part}) =$

$$= \int d\vec{x}\,\psi^\dagger(\vec{x})\left[\frac{\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m}\right]\psi(\vec{x}) \;+$$

$$+ \int d\vec{x}\,\psi^\dagger(\vec{x})\,U(\vec{x},t)\,\psi(\vec{x}) + \frac{1}{2}\int d\vec{x}\int d\vec{x}'\,\psi^\dagger(\vec{x}')\psi^\dagger(\vec{x})\,V(\vec{x},\vec{x}')\cdot\psi(\vec{x})\psi(\vec{x}')$$

Vamos restringir o problema ao caso linear (acoplamento linear com $\vec{A}$), que corresponde ao caso de fraco acoplamento entre o campo e o sistema de partículas. Notamos que em geral

$$[\vec{p},\vec{A}] \neq 0\;;$$

seja $\frac{1}{\hbar}(p_x A_x - A_x p_x)\,f = -i\partial_x(A_x f) + iA_x\partial_x f$

$$= -i\,f\partial_x A_x - iA_x\partial_x f + iA_x\partial_x f$$

$$= (-i\,\partial_x A_x)\,f\;,$$

de maneira que

$$\vec{p}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{p} = -i\hbar(\nabla\cdot\vec{A}) .$$

Usando o "gauge" de Coulomb $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, obtemos

$$\vec{p}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{p} .$$

O termo de interação linear com o campo pode ser escrito como:

$$\mathcal{H}_1 = i\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)\int d\vec{x}\, \psi^\dagger(\vec{x})\, \vec{A}\cdot\nabla\psi(\vec{x})$$

O operador $-\frac{i\hbar}{m}\nabla = \vec{v}$ é identificado com a velocidade das partículas.

Caso importante: O sistema de partículas, pode ser descrito por distribuições clássicas de correntes (Glauber, 1963) $\vec{J}(\vec{x},t)$. Isto pode ser pensado como o limite $m \to \infty$ (partículas muito massivas), mas mantendo a densidade de corrente finita. Neste caso, o Hamiltoniano de interação pode ser escrito na forma simplificada:

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{1}{c}\int d\vec{x}\, \vec{J}(\vec{x},t)\cdot\vec{A}$$

Escrevemos o termo de interação em forma 'manifestamente' hermitiana, notando que:

$$\left(i\, \psi^{\dagger}(\vec{x}) \nabla \psi(\vec{x}) \right)^{\dagger} = -i\, \nabla \psi^{\dagger}(\vec{x})\, \psi(\vec{x}) .$$

Portanto:

$$\mathcal{H}_1 = -\int d\vec{x}\, \frac{e}{c} \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^{\dagger}(\vec{x}) \nabla \psi(\vec{x}) - \nabla \psi^{\dagger}(\vec{x})\, \psi(\vec{x}) \right] \cdot \vec{A}$$

<u>Def.</u> Operador 'Densidade de Corrente' de partículas

$$\vec{j} \equiv \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^{\dagger} \nabla \psi - (\nabla \psi^{\dagger}) \psi \right]$$

$\vec{J} \equiv e\vec{j}$ é o operador 'densidade de corrente elétrica'

O termo de interação fica na forma:

$$\boxed{\mathcal{H}_1 = -\frac{1}{c} \int d\vec{x}\; \vec{J} \cdot \vec{A}}$$

Lembrar do Cap. 2 :

Heisenberg (polarização linear):

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} c\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_k}} \left\{ a_{\vec{k}\alpha}(0)\, \hat{\epsilon}^{(\alpha)}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} + \right.$$

$$\left. + a^{+}_{\vec{k}\alpha}(0)\, \hat{e}^{(\alpha)}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} \right\}$$

Schrödinger :

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} c\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_k}} \left\{ a_{\vec{k}\alpha}\, \hat{e}^{(\alpha)}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \right.$$

$$\left. + a^{+}_{\vec{k}\alpha}\, \hat{e}^{(\alpha)}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}$$

Expandindo $\vec{J}(\vec{x},t)$ na suas componentes de Fourier

$$\vec{J}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \vec{j}(\vec{k},t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}},$$

com

$$\vec{j}(\vec{k},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d\vec{x}\, \vec{J}(\vec{x},t)\, e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}},$$

e notando que

$$\frac{1}{V} \int d\vec{x}\; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\; e^{\pm i\vec{k}'\cdot\vec{x}} = \delta_{\vec{k},\pm\vec{k}'}$$

$$\mathcal{H}_1 = -\sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \cancel{e} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}}\, \frac{1}{\cancel{c}} \Big[\vec{j}(\vec{k},t)\, a_{\vec{k}\mu} \cdot \hat{e}^{(\mu)}$$

$$+ \vec{j}(-\vec{k},t)\, a^{\dagger}_{\vec{k}\mu}\, \hat{e}^{(\mu)} \Big],$$

e se a distribuição $\vec{J}(\vec{x},t)$ é real, temos:

$$\vec{j}^{\,*}(\vec{k},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d\vec{x}\, \vec{J}(\vec{x},t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \vec{j}(-\vec{k},t),$$

com o Hamiltoniano na forma:

$$\mathcal{H}_1 = -\sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}} \Big[\left(\vec{j}(\vec{k},t) \cdot \hat{e}^{(\mu)}_{\vec{k}} \right) a_{\vec{k}\mu} \; +$$

$$+ \left(\vec{j}^{*}(\vec{k},t) \cdot \hat{e}^{(\mu)}_{\vec{k}} \right) a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} \Bigg] ,$$

de maneira que cada modo do campo está acoplado linearmente com uma "força externa", com acoplamento dado por

$$f(t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}} \left(\vec{j}(\vec{k},t) \cdot \hat{e}^{(\mu)}_{k} \right) .$$

O problema se reduz ao caso anterior para cada modo

$$\mathcal{H}_{k\mu} = \hbar\omega_k \left(a^{\dagger}_{k\mu} a_{k\mu} + \frac{1}{2} \right) + $$
$$+ f(t)\, a_{\vec{k}\mu} + \overset{*}{f}(t)\, a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} .$$

Se a corrente opera em um intervalo finito de tempo, $t_1 \leq t \leq t_2$, e o estado inicial é o vácuo, sabemos que o resultado é um estado coerente do campo para $t > t_2$. Para um estado coerente, os modos estão ocupados de acordo com uma distribuição de Poisson. Isto faz com que consideremos as sucessivas emissões de fótons (pela corrente prescrita) como eventos estatísticamente independentes.

§ Referências

Carruthers & Nieto, "Coherent states and the Forced Quantum Oscillator", AJP 33, 537 (1965)

Merzbacher, "Quantum Mechanics" 3rd Ed. (1998), p. 338